



**زیربرنامه:**

ConMeanFlow\_AUSM\_PlusUP

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان** | مرتضی نامور |  |
| علیرضا رضایی |  |
| **تهیه کنندگان مستند** | مرتضی نامور، علیرضا رضایی | |
| **تاییدکنندگان** |  | |
| **تاریخ تنظیم سند** | 22/02/95 | |
| **شناسه سند** | **MC2F064F1** | |
| **زبان برنامه‌نویسی** | **Fortran 90** | |

1. وظایف

در این زیربرنامه مقدار بخش جابجایی معادلات حاکم با استفاده از روش بالادستیUP AUSM+ محاسبه می گردد. این زیربرنامه می تواند برای جریان های غیرلزج، آرام و مغشوش بکار برده شود. نکته خاص در مورد این نحوه گسسته سازی بخش جابجایی اینست که می توان از این روش برای جریان هایی با سرعت بسیار پایین استفاده نمود.

1. توضیحات و تئوری

امروزه کدهای دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) یک ابزار رایج در آنالیزهای مهندسی و همچنین فرآیند ساخت می‌باشند. کدهای تجاری نه تنها در صنایع بلکه در محیط‌های دانشگاهی و لابراتورها نیز به صورت پایداری توسعه داده می‌شوند. دینامیک سیالات محاسباتی را می‌توان مجموعه‌ای از قواعد دانست که کارآیی آن‌ها اثبات شده است، بنابراین نیاز به کار و بررسی بیشتر بر روی اثبات کارآیی این روش احساس نمی‌گردد. در واقع هر چه قدرت پردازش و حافظه‌ی کامپیوتر‌ها بیشتر رشد داشته باشد، مسائل بیشتر و پیچیده‌تری را می‌توان با استفاده از CFD حل نمود. این روش امروزه تنها منحصر به متخصصان و دانشمندان نمی‌شود بلکه عموم کاربران آن می‌باشند. قابل ذکر است که این پیشرفت‌ها مرهون تلاش بی وقفه آن دسته از متخصصانی بوده که در زمینه‌های مختلف CFD همچون تولید شبکه، دقت، بهینه‌سازی، مدل سازی توربولانس و ... کار کرده اند.

هرچقدر که استفاده از CFD رایج‌تر می‌گردد، استفاده از شماتیک‌های عددی که قابلیت استفاده در طیف گسترده‌تری از مسائل را دارند نیز بیشتر حس می‌شود. بنابراین باید بر اهمیت اعتبار نتایج حاصله تاکید نمود که نتیجه‌ی یک شماتیک عددی قابل اعتماد و دقیق می‌باشد. آن‌چه که در این گزارش مطرح می‌شود توضیح تلاش‌ها در جهت توسعه یک شماتیک دقیق، پایدار و جامع می‌باشد. به عبارت دیگر یک شماتیک عددی علاوه بر دقیق و پایدار بودن، باید در محدوده گسترده‌ای از مسائل قابلیت کاربرد داشته باشد. در این گزارش به توضیح تلاش‌ها جهت توسعه یک شماتیک عددی دقیق ، پایدار و عام برای توصیف شار عددی پرداخته می‌شود:

یکی از مهم‌ترین مسائل در CFD بررسی جریان‌های چند فازی (رخ دادن فازهای تراکم پذیر و ناپذیر همزمان) می‌باشد. برای همین منظور باید شماتیک‌های عددی به نحوی توسعه داده شوند که در هر دو رژیم جریان قابل اعتماد باشند. در صورتی که از یک کد استاندار جریان تراکم پذیر برای حل یک جریان با سرعت پایین (رژیم تراکم ناپذیر) استفاده شود، دو حالت عمدتا مشاهده می‌گردد:

1) حل با سرعت بسیار کمی همگرا می‌گردد یا اصلا همگرا نمی‌شود و یا

2) حل با سرعت زیادی به سمت تولید جواب‌های نادرست حرکت می‌کند.

باید ذکر نمود که این دو اتفاق با یکدیگر مرتبط نیستند زیرا مورد اول از سطح پیوستگی ناشی می‌گردد و صرفنظر از نحوه گسسته سازی مکانی مورد استفاده، به معادلات حاکم بستگی دارد. اما مشکل دوم به نوع شماتیک عددی به کار رفته برای شبیه‌سازی شار مربوط است که مد نظر این کار است.

در دهه 1990، تحقیقات مهمی در زمینه استفاده از یک Preconditioner برای اعمال تغییر در ویژگی‌های معادلات حاکم صورت گرفت [1]، [2]، [3] و [4]. در تمام مراجع یاد شده هم از شماتیک تفاضل مرکزی و هم از شماتیک Roe [5]در گسسته سازی مکانی استفاده شده است. همچنین اصلاحاتی بر روی شماتیک‌های خانواده AUSM پیشنهاد شد که نه تنها در جریان‌هایی با سرعت کم [6] و [7] و [8] بلکه در جریان‌های چند فازی [8] نیز نتایج قابل قبولی از خود نشان دادند. با وجود موفقیت‌هایی که این روش‌ها در عمل از خود نشان دادند، ناپیوستگی در نقاطی با عدد ماخ صفر مشاهده می‌شود مگر آن که از یک عدد ماخ قطع کننده (Cut Off) استفاده شود. اگرچه از این مولفه حتی در روش‌های Preconditioning نیز استفاده می‌شود، اما هیچگاه یک انتخاب دلخواه نبوده است. زیرا انتخاب آن باید تابعی از مشخصات جریان باشد.

Liou [9] سعی نمود تا روش AUSM+ را به نحوی بهبود دهد که همگرایی آن تابعی از عدد ماخ نباشد و در جریان‌های با سرعت کم تحت تاثیر قرار نگیرد و حداقل نرخ همگرایی مورد قبول باشد. همچنین دقت حل نیز باید در محدوده وسیعی از اعداد ماخ مورد قبول باشد. به همین منظور او با استفاده از روش مجانبی یک شماتیک عددی در محدوده  توسعه داد.

* 1. روش AUSM+Up

تجربه نشان داده است که نکته‌ی کلیدی برای توسعه‌ی یک شماتیک دقیق، پایدار و با قابلیت کار در تمام سرعت‌ها، در طراحی شارهای غیر لزج نهفته است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که  و  به ترتیب بردارهای خاصیت‌های Conservative و شار غیر لزج می‌باشند.

در ایتدا تنها به توسعه شار یک بعدی پرداخته می‌شود اما توسعه در جریان‌های چند بعدی نیز سر راست می‌باشد. برای گاز ایده‌آل  و  می‌باشند.

همچنین باید یاد آور شد که برای سایر سیستم‌های بقا نیز می‌توان این روش ‌را توسعه داد [10]. پیش از هر قدمی در راستای توضیح روش AUSM+-up لازم است تا توضیح مختصری در مورد مدل‌های رایج این روش داده شود:

در گام اول شار غیر لزج به دو بخش شار جابجایی و فشار تقسیم می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

لازم به یاد آوری است که ترم شار جابجایی از یک خاصیت اسکالر شار جرمی  تشکیل شده است که در عین حال این شار جرمی در بردارنده جهت جریان نیز می‌باشد. برای تمام سیستم‌های بقا، خاصیت‌های Conservative  توسط  جابجا می‌شوند.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

شار فشار تنها شامل ترم فشار می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در خانواده AUSM شار عددی به شکل زیر نوشته می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که  با استفاده از یک مدل Upwind محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

واضح است که وظیه اصلی تعریف  و  می‌باشد که در این گزارش نیز به آن پرداخته می‌شود.

علاوه بر تمام مزایایی که روش‌های AUSM [11] و AUSM+ [12] از خود نشان دادند، یکی از معدود معایب این روش‌ها ظهور نوسانات فشار در راستای شبکه و در نواحی با سرعت کم است. برای مثال می‌توان به راستای عمود بر لایه مرزی اشاره نمود. به همین دلیل Liou برای بر طرف کردن این نقیصه روش AUSM+-up را معرفی نمود. از مزایایی که Liou برای روش خود برشمرده است می‌توان به ساده بودن و عدم ظهور این نوسانات در سرعت‌های پایین در آن اشاره داشت.

* 1. شار جرمی

شار جرمی که در وجه مشترک بین دو سلول مجاور محاسبه می‌گردد و با زیر نویس  مشخص می‌شود، شکلی مطابق زیر دارد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

دلیل تبدیل سرعت جابجایی روی وجه به عدد ماخ، آن است که استفاده از عدد ماخ رایج تر است.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

برای محاسبه عدد ماخ در وجه مشترک بین دو سلول L و R ، Liou عدد ماخ میانگین در وجه را به شرح زیر تجزیه نمود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

اعداد ماخ تجزیه شده ، توابع چند جمله‌ای از درجه‌های  هستند که به شکل زیر تعریف می‌شوند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در این‌جا  ترم پخش فشار می‌باشد. این عبارت به دلیل بهبود محاسبات در ماخ های پایین و یا جریان‌های چند فازی اضافه شده است و بصورت زیر تعریف می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

 چگالی میانگین در وجه  می‌باشد.  ضریبی است که در محدوده  تعریف می‌گردد. و  باید کوچکتر مساوی 1 باشد که در این کار برابر با 1 در نظر گرفته شده است.  تابع مقیاس است و همواره در محدوده صفر تا 1 قرار دارد و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

 عدد ماخ مرجع است و به صورت زیر ارائه شده است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

عدد ماخ محلی  و عدد ماخ قطع کننده ( Cut-Off)  به صورت زیر تعریف می‌گردند:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

باید اشاره نمود که  عدد ماخ جریان ازاد است و ضریب  باید به گونه‌ای انتخاب شود که مانع از صفر شدن  شود. عدد ماخ قطع کننده  در این کار برابر با  در نظر گرفته می‌شود به عبارت دیگر  برابر با یک در نظر گرفته می‌شود.

* 1. شار فشار

در خانواده روش‌های AUSM محاسبه فشار میانگین در وجه به شکل زیر تعریف می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که  مطابق با درجه چند جمله‌ای  انتخاب می‌گردد. به دلیل جواب‌های دقیق‌تر چند جمله‌ای درجه 5 انتخاب می‌شود.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

مقدار در حالت کلی می تواند برابر  انتخاب شود اما جهت تدوین روشی که در تمامی اعداد ماخ جواب های بهتری ارائه دهد و سرعت همگرایی بالاتری باشد رابطه زیر برای محاسبه ارائه شده است:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در روش AUSM+-up، Liou از چند جمله‌ای فشار اصلاح شده استفاده نمود.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

که:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

و ضریب  می‌باشد. یاد آوری می‌شود که عبارت پخش سرعت  از رابطه  برگرفته می‌شود و برای ماخ‌های  منجر می‌شود به :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

ضریب  در نواحی مافوق صوت ترم  را از معادلات خارج می‌کند. در واقع در صورت اضافه شدن ترم  روش AUSM+-U نامیده می‌شود و در صورتی که  نیز مورد استفاده قرار گیرد روش را AUSM+-up گویند.

* 1. انتخاب سرعت صوت در وجه

همانند روش AUSM+ در روش AUSM+-up نیز می‌توان سرعت صوت در وجه  را به نحوی محاسبه نمود که بین دو ناحیه ناپیوسته، شوک نرمال به دقت نشان داده شود.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در اینجا ، سرعت صوت بحرانی در زمانی که عدد ماخ محلی برابر با 1 است می‌باشد. در مورد گاز کامل می‌توان آن را تابعی از آنتالپی کل دانست:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Liou با دخیل کردن اطلاعات جهت جریان، تعریف سرعت صوت میانگین در وجه را اصلاح نمود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

در گام آخر با توجه به مقدار عدد ماخ، شار عبوری مطابق زیر تعیین می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

باید توجه داشت که توضیحات روبرو برای حالت یک بعدی برقرار است. حال این بحث مطرح می‌گردد که اگر یک جریان چند بعدی داشته باشیم، شرایط به چه صورت می‌شود. برای همین منظور یک فلوچارت در زیر تنظیم شده تا الگوریتم حل در حالت دو بعدی مشخص شود. برای حالت 3 بعدی نیز همین الگوریتم قابل تعمیم است.

1. فلوچارت روش AUSM+-up

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| فرآیند حل | سمت چپ وجه (L) | سمت راست وجه (R) |
| مشخص نمودن بردار نرمال سطح و مولفه‌های سرعت در دو طرف وجه |  |  |
| محاسبه سرعت صوت بحرنی در وجه |  | |
| محاسبه عدد ماخ در دو سمت وجه |  |  |
| تجزیه چند جمله‌ای های عدد ماخ |  |  |
| محاسبه ماخ میانگین |  | |
| تجزیه چند جمله‌ای های فشار |  |  |
| محاسبه فشار میانگین |  | |
| محاسبه شار Upwind |  |  |

در اینجا نحوه گسسته سازی بخش جابجایی با دیدگاه حجم محدود آورده می شود. اگر مرزهای حجم کنترل یعنی *s* را در یک شبکه محاسباتی بصورت گسسته شده در نظر بگیریم ‏شکل (1)، بخش جابجایی بصورت زير محاسبه می شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

\*

*j=1*

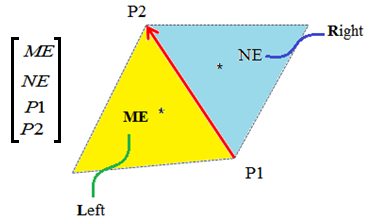
*i*

*j=2*

*j=Nedge*

1. مرزهای گسسته شده یک سلول

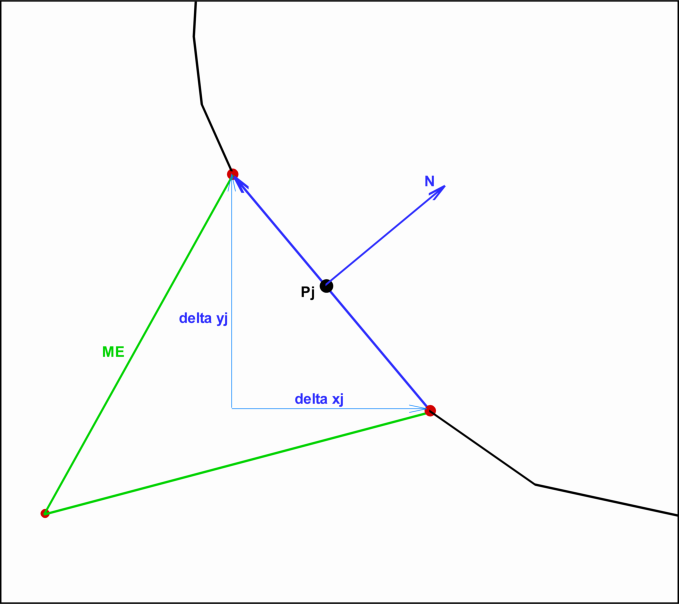
در رابطه ‏(1) *j* شمارنده اضلاع حجم کنترل مي‌باشد. ذکر این نکته بسیار حائز اهمیت است که فرض می شود مقادیر بقایی *W* در یک حجم کنترل برابر مقدار آن در مرکز حجم کنترل است. همچنین با توجه به حساسیت و توجه بسیار به ساختار داده ای در هنگام پیاده سازی روش های بالادستی یکبار دیگر نحوه ذخیره نقاط و همسایه های یک ضلع آورده می شود:



1. سلول های سمت چپ و راست یک ضلع

در محاسبه فلاکس­ها منظور از Lهمان سلول سمت چپ يا در واقع همان سلول اصلی و R نشاندهنده سلول سمت راست يا سلولي که در همسايگي سلول اصلی قرار دارد، می باشد.

از آنجایی که در اضلاعی که بر روی مرز ها قرار دارند، مقادیر مورد نیاز در میانه ضلع با استفاده از شرایط مرزی بدست می آید، در اینجا مقادیر بدست آمده از شرایط مرزی دوردست بجای مقادیر میانه ضلع قرار داده می شود و روش بالادستی ارائه شده در این گزارش برای اینکار استفاده نخواهد شد. از آنجا که جهت اضلاع همیشه بگونه ای می باشد که میدان محاسباتی در طرف چپ قرار دارد، بنابراین مقادیر محاسبه شده برای بخش جابجایی مستقیما به سلول مجاور آن اضافه می شود. ‏شکل (3) این موضوع را بهتر نشان می دهد.



1. محاسبه بخش جابجایی در یک ضلع واقع بر روی مرز

جهت پرهیز از استفاده از دستورهای شرطی و در نتیجه صرفه جویی در زمان محاسبات، با توجه به نوع اضلاع، محاسبات در حلقه های جداگانه ای انجام می شود. برای این منظور اضلاعی که بر روی مرز ها یا غیرمرزی می باشند در حلقه های جداگانه ای محاسبه مقدار بخش جابجایی برای آنها انجام می شود.

1. بخش‌های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش های زیربرنامه مطابق با شماره گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. مشخص نمودن ضرایب ثابت

در گام اول ضرایبی که در طی الگوریتم حل استفاده می‌شوند، مشخص می‌گردد. برای مثال انتخاب می گردند. همچنین  تعریف می‌گردد.

1. صفر نمودن

در این گام آرایه‌هایی که در مقادیر شار در آن‌ها ذخیره می‌شوند در ابتدای الگوریتم برابر با صفر می‌شوند.

1. جاروب کردن وجوه مرزی

در این حلقه، به محاسبه شار عبوری از وجوه مرزی پرداخته می‌شود. از آن‌جا که مقادیر بر روی وجوه تعیین شده‌اند. بنابراین نیاز به هیچ‌گونه میانیابی احساس نمی‌شود و این مقادیر با استفاده از مقادیر مرزی به صورت مستقیم محاسبه می‌گردند.

1. مشخص نمودن شماره سلول

با استفاده از آرایه IDS شماره سلول سمت راست وجه مرزی با شماره I مشخص می‌گردد.

1. مشخص نمودن مولفه‌های سرعت

اجزای سرعت  در این گام مشخص می‌شوند. باید توجه داشت که آن‌چه در آرایه‌های WB و WNP1 ذخیره شده اند به ترتیب به شکل زیر می‌باشند. به همین دلیل برای محاسبه سرعت باید آرایه‌ی مربوطه بر چگالی تقسیم شوند.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. مشخص نمودن سرعت نرمال

با استفاده از مقادیر مشخص شده سرعت بر روی وجه، و با استفاده از بردار نرمال سرعت نرمال معین می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

همچنین فشار نیز در متغییر Pm ذخیره می‌گردد.

1. محاسبه شار

در گام بعد شار عبوری محاسبه می‌شود :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. ریختن به درون آرایه سلول مجاور

شار عبوری از هر وجه باید به سلول مجاور همان وجه افزوده یا کساته شود ( که بسته به جهت بردار نرمال دارد). در این بخش این شار به درون سلول مجاور که با متغییر ME نمایان می‌شود، ریخته می‌شود.

1. جاروب کردن وجوه داخلی

بعد از محاسبه شار عبوری از وجوه مرزی و اضافه نمودن آن به سلول های مجاور، نوبت محاسبه شار عبوری از وجوه داخلی و غیر مرزی می‌باشد. از آن جا که سرعت و هیچ کدام یک از مولفه ها در این وجوه مشخص نیستند، بنابراین با استفاده از روش های مختلف در این وجوه سعی می‌شود تا مقدار مناسب تخمین زده شود.

1. مشخص کردن سلول‌های مجاور و بردارهای عمود و طول ضلع

در این بخش با استفاده از ارایه‌ی IDS سلول‌های مجاور مشخص می‌شوند. سلول سمت چپ در متغییر L و سلول سمت راست با استفاده از متغییر R مشخص می‌گردد. از آنجا که به بردارهای عمود یکه نیاز می باشد باید بردارهای عمود بر طول ضلع تقسیم گردد که در اینجا اینکار انجام می شود. بنابراین بردارهای عمود یکه و همچنین طول ضلع در پارامترهای محلی ذخیره می شوند.

1. مشخص نمودن خاصیت‌ها در سمت چپ

در این قسمت خاصیتهای سمت چپ مشخص می‌گردند. توجه شود که در حالت با دقت مرتبه اول خاصیت سمت چپ با دقت مرتبه یک برونیابی می‌شود. یعنی مقدار خاصیت در سمت چپ نقطه مورد بررسی برابر است با مقدار خاصیت در مرکز سلول مورد نظر. اما در مرتبه‌های بالا این خاصیت ها با استفاده از مشتقات مرتبه اول و دوم و .. برونیابی می‌گردند.

1. مشخص نمودن خاصیت‌ها در سمت راست

در این بخش نیز مطابق با بخش قبل خاصیت‌های برونیابی شده با استفاده از سلول سمت راست وجه محاسبه می‌گردند.

1. محاسبه سرعت صوت بحرانی

ابتدا آنتالپی در هر سمت معین می‌شود و سپس سرعت صوت بحرانی محاسبه می‌شود. توجه شود که در اینجا از واژه سرعت صوت بحرانی استفاده شده است که توسط Liou معرفی و به کار گرفته شده است. و با تعریف سرعت صوت متفاوت می‌باشد. روابط مورد نظر برای محاسبه آنتالپی  و سرعت صوت بحرانی در فلوچارت آمده است .

1. محاسبه سرعت نرمال

با استفاده از مولفه‌های سرعت و بردار نرمال بر وجه سرعت نرمال بر وجه (Contra variant) محاسبه می‌شود:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه سرعت صوت

با استفاده از  مقدار سرعت صوت در وجه مشخص می‌گردد. ابتدا  در دو طرف وجه مشخص می‌گردند و سپس مقدار ماکزیمم به عنوان سرعت صوت در وجه انتخاب می‌گردد. باید توجه داشت که در برخی مقالات مقدار مینیمم سرعت محاسبه شده در دو طرف وجه به عنوان سرعت صوت میانگین در وجه انتخاب می‌شود. تقریبا این انتخاب بسته به مساله ممکن است سبب افزایش پایداری یا ناپایداری حل می‌شود و بیشتر بستگی به مساله دارد (تجربه نگارنده نشان می‌دهد هر کدام از این انتخاب‌ها در سرعت‌های مافوق صوت ممکن است سبب واگرایی مساله شوند).

1. محاسبه عدد ماخ

با استفاده از سرعت صوت محاسبه شده در وجه (مرحله قبل) و سرعت نرمال بر وجه، عدد ماخ محاسبه می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. ساختن چند جمله‌ای‌های ماخ

بعد از محاسبه اعداد ماخ در دو طرف وجه، نوبت به ساخت چند جمله‌ای های ماخ است که نحوه ایجاد آن‌ در زیر بیان شده است. آنچه که نیاز است و .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه عدد ماخ محلی

متغییر ماخ محلی  با استفاده از رابطه  و بر اساس عدد ماخ در دو سمت راست و چپ محاسبه می‌شود.

1. محاسبه ماخ مرجع و تابع مقیاس fa

با استفاده از رابطه  عدد ماخ مرجع محاسبه می‌گردد. باید توجه شود که عدد ماخ قطع کننده (Cut-Off)  برابر با عدد ماخ جریان ورودی می‌باشد. و تابع مقیاس fa، با استفاده از  محاسبه می‌شود.

1. محاسبه ترم پخش فشار

ترم پخش فشار  با استفاده از رابطه  محاسبه می‌شود.

1. محاسبه عدد ماخ در وجه

بعد از تشکیل چند جمله‌ای با استفاده از رابطه عدد ماخ در وجه محاسبه می‌شود.

1. محاسبه شار جرمی

با استفاده از سرعت صوت میانگین و عدد ماخ محاسبه شده در وجه، با توجه به جهت عدد ماخ، شار جرمی هر وجه محاسبه می‌گردد:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. ساختن چند جمله‌ای‌های فشار

در این بخش سرعت چند جمله‌ای فشار ساخته می‌شود.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. محاسبه عبارت پخش سرعت

عبارت پخش سرعت  با استفاده از  محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه فشار در وجه

بعد از تشکیل چند جمله‌ای با استفاده از رابطه ، فشار میانگین در وجه محاسبه می‌شود

1. محاسبه بردار شار

در گام نهایی با استفاده از آخرین گام ارائه شده در فلوچارت بردار شار با توجه به علامت عدد ماخ (مثبت و منفی بودن) و متعاقب آن شار جرمی محاسبه می‌شوند.

1. اضافه کردن شار‌های محاسبه شده وجه مورد نظر به سلول‌های همسایه

بعد از محاسبه شار عبوری از هر وجه‌، این شار به سلول‌های مجاور اضافه (یا کم ) می‌شود. باید توجه شود که این کم شدن به دلیل جهت معکوس بردار نرمال نتیجه می‌شود.

.

1. مراجع

[1] E. Turkel, “Preconditioned methods for solving incompressible and low speed compressible equations,” *Journal of Computational Physics,* pp. 277-298, 1987.

[2] Y. Choi و C. Merkle, “The application of preconditioning in viscous flows,” *Journal of Computational Physics ,* pp. 207-223, 1993.

[3] J. Weiss و W. Smith, “Preconditioning applied to variable and constant density time-accurate flows on unstructured meshes,” *AIAA,* 1994.

[4] B. Van Leer, J. L. Thomas, P. L. Roe و R. W. Newsome, 1987.

[5] P. Roe, “Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes,” *Journal of Computational Physics,* 1981.

[6] R. Chima و M. Liou, “Comparison of the AUSM+and H-CUSP schemes for turbomachinery applications,” در *AIAA CFD Conference*, 2003.

[7] J. Edwards و M. Liou, “Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds,” *AIAA Journal ,* p. 1610–1617, 1998.

[8] M. Liou و J. Edwards, “ Numerical speed of sound and its application to schemes for all speeds,” در *AIAA Paper*, 1999.

[9] M. Liou, “A sequel to AUSM, part II: AUSM+-up for all speeds,” *Journal of Computational Physics,* جلد 214, pp. 137-170, 2006.

[10] C.-H. Chang و M. Liou, “A new approach to the simulation of compressible multifluid flows with AUSM+ scheme,” در *AIAA paper*, 2003.

[11] M. Liou و C. J. Steffen, “A new flux splitting scheme,” *Journal of Computational Physics,* جلد 107, شماره 23, 1993.

[12] M.-S. Liou, “A sequel to AUSM: AUSM+,” *Journal of Computational Physics ,* p. 364–382, 1996.

[13] P. Roe, “A Survey of Upwind Differencing Techniques,” *Lecture Notes in Physics,* جلد 323, p. 69, 1989.

[14] J. J. Quirk, ICASE , 1992.

[15] M. Liou, “On a New Class of Flux Splitting,” *in Lecture Notes in Physics,* جلد 414, p. 115, 1993.

[16] Y. Wada و M. Liou, “An accurate and robust flux splitting scheme for shock and contact discontinuities,” *SIAM J. on Scientific Computing,* 1977.

[17] F. Coquel و M. Liou, “Stable and Low Diffusive Hybrid Upwind splitting Methods,” 1992.

[18] F. Conquel و M. Liou, “Field by Field Hybrid Upwind Splitting Methods,” 1993.

[19] R. W. MacCormack, “The Carbuncle CFD Problem,” 2011.

[20] M. Liou, “A Sequel to AUSM: AUSM1,” *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS,* جلد 129, p. 364–382, 1996.